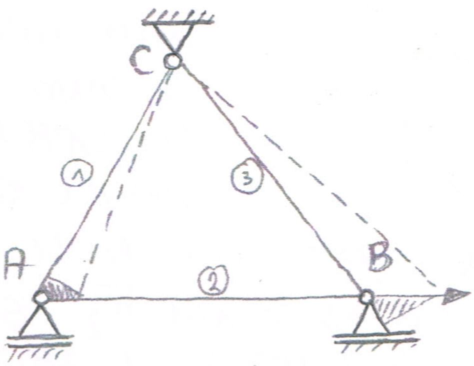
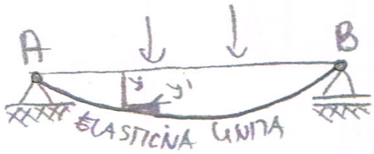
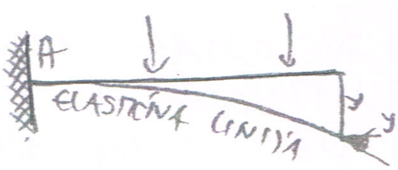
FAKULTET ZA POMORSTVO
BRODOMAŠINSTVO
POMORSKE NAUKE

OTPORNOST MATERIJALA
PISANA PREDAVANJA

4 KOLOKVIJUM







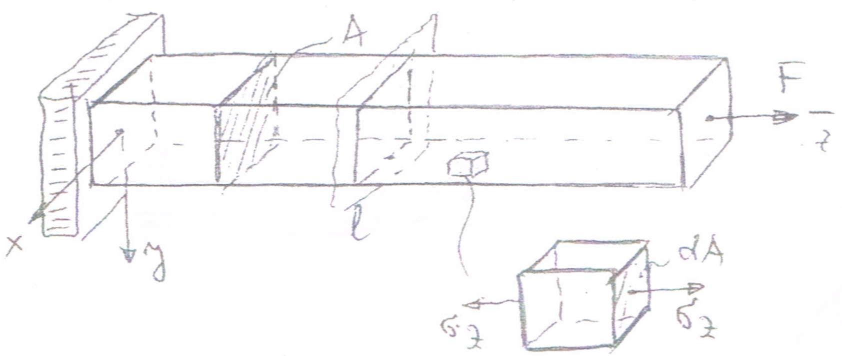
AKSIJALNO NAPREZANJE
SAVIJANJE SILAMA
UVIJANJE

KOTOR 2012 god.

ELEMENTARNE TEORIJE NAPREZANJA GREDNOG NOSAČA

1. AKSIJALNO NAPREZANJE

AKSIJALNO NAPREZANJE JE VRSTA OPTEREĆIVANJA (NAPREZANJA) GREDNOG NOSAČA KADA OPTEREĆENJE DEJSTVUJE U PRAVCU OSE NOSAČA (SL). KOD PROIZVOLJNO UOČENOG DJELIĆA OD KOMPONENATA TENZORA NAPONA POJAVLJUJE SE SAMO NORMALNI NAPON σ_z U PRAVCU OSE z,



DOK SU SVE OSTALE KOMPONENTE JEDNAKE NULI.

VEZU IZMEĐU NORMALNOG NAPONA σ_z I SILE F ĆEMO DOBITI KADA PRESIJEČEMO NOSAČ I POSMATRAMO RAVNOTEŽU NPR. DESNOG DIJELA.

$$\int_A \sigma_z \, dA = F$$

POŠTO JE NAPON σ_z ISTI U SVAKOJ TAČKI POPREČNOG PRESJEKA TO σ_z KAO KONSTANTNU VELIČINU MOŽEMO IZBACITI ISPRED INTEGRALA, PA JE

$$\sigma_z \int_A dA = F \Rightarrow \sigma_z \cdot A = F$$

$$\sigma_z = \frac{F}{A}$$

POD DEJSTVOM SILE F ŠTAP SE IZDUŽI ZA Δl PA JE

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{F}{EA},$$

ODNOSNO

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{EA}.$$

DIMENZIONISANJE: DA NEBI DOŠLO DO LOMA ŠTAPA POD DEJSTVOM OPTEREĆENJA NEOPHODNO JE DA JE MAKSIMALNI NAPON U ŠTAPU $\sigma_{z\,max}$ MANJI OD NEKOG DOZVOLJENOG NAPONA σ_{doz} TJ.

$$\sigma_{z\,max} \leq \sigma_{doz}.$$

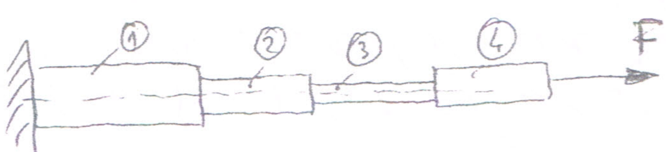
AKO SE ŠTAP DUŽINE l ZAGRIJE ZA Δt (°C) ON ĆE SE IZDUŽITI ZA Δl PRI ČEMU JE

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t.$$

OVO IZDUŽENJE TREBA DODATI IZDUŽENJU OD OPTEREĆENJA UKOLIKO JE ŠTAP I OPTEREĆEN SILOM TJ.

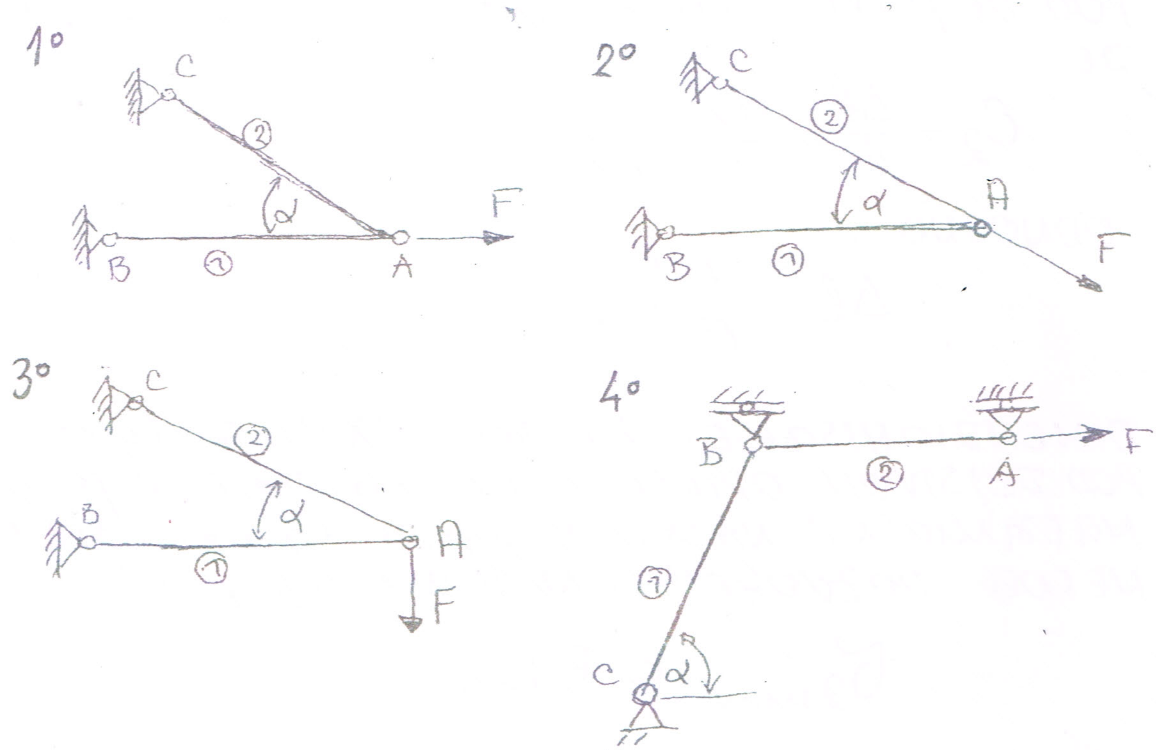
$$\Delta l_{uk.} = \frac{F \cdot l}{EA} + \alpha \cdot l \cdot \Delta t.$$

KOD ŠTAPA STEPENASTOG POPREČNOG PRESJEKA (SL.) UKUPNO IZDUŽENJE JE JEDNAKO ZBIRU IZDUŽENJA POJEDINIH DIJELOVA ŠTAPA KOJI SU KONSTANTNOG POPREČNOG PRESJEKA TJ.

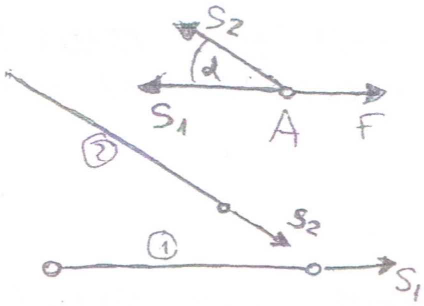


$$\Delta l_{uk} = \Delta l_{①} + \Delta l_{②} + \Delta l_{③} + \cdots$$

PRIMJER: Odrediti sile u štapovima i ukupno pomjeranje napadne tačke sile. Dato je F, l, E, A, α.



1° Sile u štapovima S_1 i S_2 određujemo iz uslova ravnoteže za sistem od tri sučeljne sile S_1, S_2 i F koje dejstvuju na čvor A koji je u ravnoteži (miruje) pa je



$$\Sigma F_{iH}=0: \quad F-S_1-S_2\cos\alpha=0$$

$$\Sigma F_{iV}=0: \quad S_2\sin\alpha=0 \Rightarrow \boxed{S_2=0},$$

odnosno $\boxed{S_1=F}$.

Na štapove dejstvuju sile S_1 i S_2 suprotnih smjerova od smjerova sila koje dejstvuju na čvor A. Dakle, pod dejstvom sile S_1 štap (1) se izduži za veličinu Δl_1 koja je jednaka

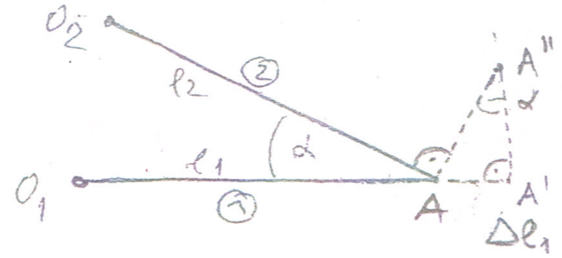
$$\Delta l_1=\frac{S_1\cdot l}{EA}.$$

Štap (2) će ostati nedeformisan jer je

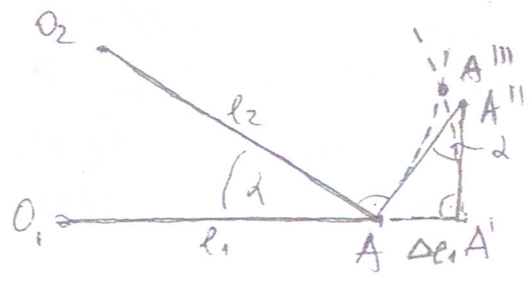
sila u njemu jednaka nuli tj. $S_2=0$ pa je

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l}{EA} = 0 .$$

Imajući u vidu da se štap ① izdužio a da se štapu ② nije promijenila dužina deformisana konfiguracija sistema je prikazana na slici. Duž $\overline{AA'}$ predstavlja izduženje štapa ①.



Pravci $A'A''$ i AA'' su normalni na štapove ① i ② u njihovoj nedeformisanoj konfiguraciji. U presjeku tih normala dobija se tačka A'' koja predstavlja, približno, novi položaj tačke A tj. njen položaj nakon deformisanja sistema. Treba napomenuti da bi potpuno tačan položaj tačke A nakon deformisanja sistema dobili kada bi iz tačaka O_1 i O_2 opisali kružne lukove poluprečnika $l_1+\Delta l_1$ i l_2 i u njihovom presjeku dobili tačku A''' koja neznatno odstupa od položaja A'' tačke A.



Iz trougla $\Delta AA'A''$ dobijamo horizontalno (f_{AH}) i vertikalno (f_{AV}) pomjeranje tačke A.

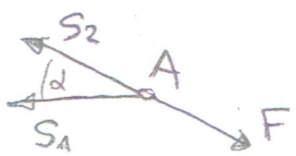
$$f_{AH} = AA' = \Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA} = \frac{Fl}{EA}$$

$$f_{AV} = A'A'' = \frac{AA'}{tg\alpha} = \frac{Fl}{EA\, tg\alpha}$$

Ukupno pomjeranje A je

$$f_A = \sqrt{f_{AH}^2 + f_{AV}^2} = \frac{Fl}{EA}\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2\alpha}},$$

2° SILE U ŠTAPOVIMA ODREĐUJEMO IZ RAVNOTEŽE ČVORA A, I TO



$$\Sigma F_{iH} = 0: \; S_1 - S_2\cos\alpha - F\cos\alpha = 0$$

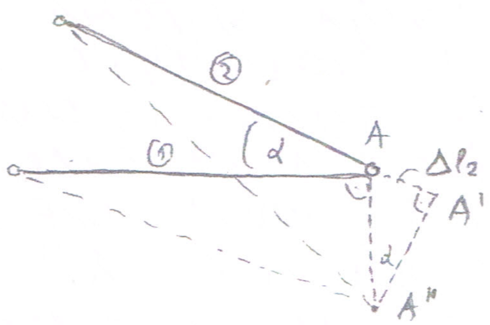
$$\Sigma F_{iV} = 0: \; S_2\sin\alpha - F\sin\alpha = 0,$$

PA JE $S_2 = F$ i $S_1 = 0$.

ŠTAP ① JE, DAKLE NEOPTEREĆEN, A ŠTAP ② JE OPTEREĆEN NA ISTEZANJE. ŠTAP ① SE NEĆE IZDUŽITI (SKRATITI) DOK ĆE SE ŠTAP ② IZDUŽITI ZA

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 l}{EA} = \frac{Fl}{EA}.$$

DEFORMISANA KONFIGURACIJA SISTEMA JE PRIKAZANA NA NAREDNOJ SLICI ISPREKIDANIM LINIJAMA. IZ TROUGLA $\triangle AA'A''$ VIDIMO DA NEMA HORIZONTALNOG POMERANJA TAČKE A, TJ. $f_{AH} = 0$ DOK VERTIKALNO NJENO POMERANJE f_{AV} IMA VREDNOST

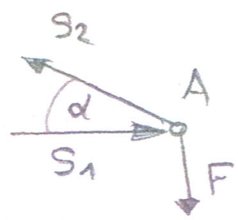


$$f_{AV} = \frac{AA'}{\sin\alpha} = \frac{Fl}{EA\cdot\sin\alpha},$$

A TO JE UJEDNO I UKUPNO POMERANJE TAČKE A TJ.

$$f = f_{AV} = \frac{Fl}{EA\sin\alpha}.$$

$\boxed{3°}$ SILE U ŠTAPOVIMA ODREĐUJEMO IZ RAVNOTEŽE ČVORA A



$$S_2 \sin\alpha - F = 0$$
$$S_1 - S_2 \cos\alpha = 0 ,$$

PA JE

$$S_2 = \frac{F}{\sin\alpha} ; \quad S_1 = \frac{F\cos\alpha}{\sin\alpha} .$$

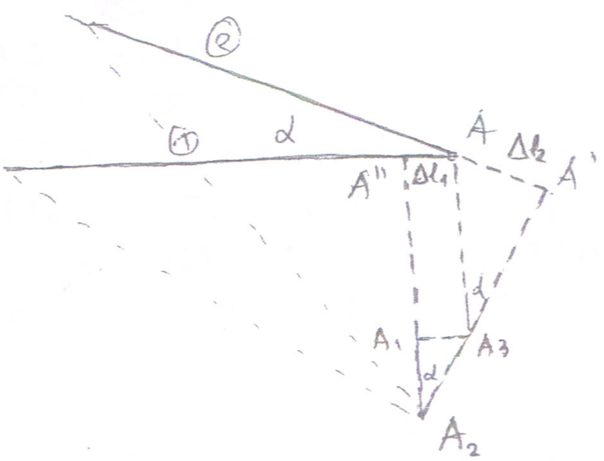
Dakle štap ② je opterećen na istezanje a štap ① na pritisak. Štap ② će se izdužiti za

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l}{EA} = \frac{Fl}{EA\sin\alpha} ,$$

A ŠTAP ① CE SE SKRATITI ZA

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA} = \frac{F\cos\alpha \cdot l}{EA\sin\alpha} .$$

Deformisana konfiguracija sistema i novi položaj tačke A prikazani su na slici.



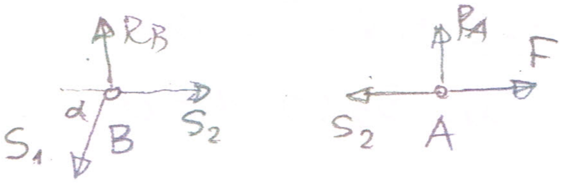
Iz figure $AA'A''A_2$ određujemo horizontalno i vertikalno pomjeranje tačke A, i to:

$$f_{AH} = \Delta l_1 = \frac{Fl\cos\alpha}{EA\sin\alpha}$$

$$f_{AV} = AA_3 + A_1A_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} + \frac{\Delta l_1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{Fl}{EA\sin^2\alpha} + \frac{Fl\cos\alpha}{EA\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}$$

$$= \frac{Fl}{\sin^2\alpha}(1 + \cos^2\alpha) .$$

4° Iz posmatranja ravnoteže čvorova A i B određujemo sile u štapovima ① i ② i to



$S_2 = F$,

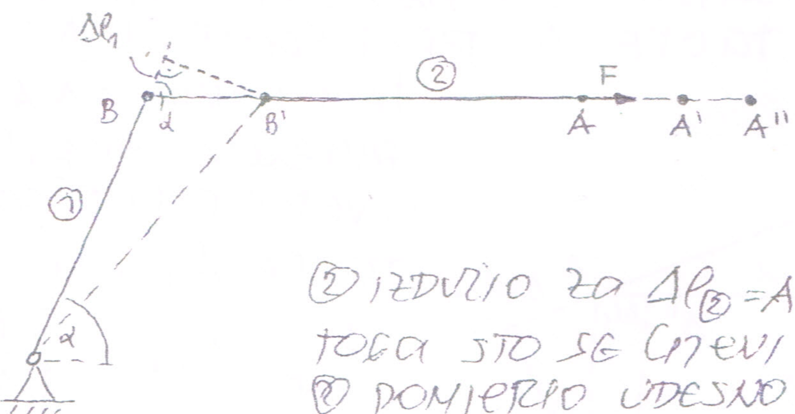
$$S_1 = \frac{S_2}{\cos\alpha} = \frac{F}{\cos\alpha}.$$

Dakle, štapovi ① i ② će da se izduže, i to za vrijednosti

$$\Delta l_{①} = \frac{S_1 \cdot l}{EA} = \frac{F l}{EA\cos\alpha}$$

$$\Delta l_{②} = \frac{S_2 l}{EA} = \frac{F l}{EA}.$$

Imajući u vidu ta izduženja, kao i činjenicu da se tačke A i B mogu pomjerati samo u horizontalnom pravcu, dok je tačka C nepokretna, deformisana konfiguracija sistema ima izgled kao na slici. Napadna tačka sile se pomjera udesno iz dva razloga, i to zbog toga što se štap ② izdužio za $\Delta l_{②} = A'A''$ i zbog toga što se cijeli kraj štapa ② pomjerio udesno zbog izduženja štapa ①, a to je dužina BB'



koja je jednaka $\Delta l_{①}/\cos\alpha$ tj.

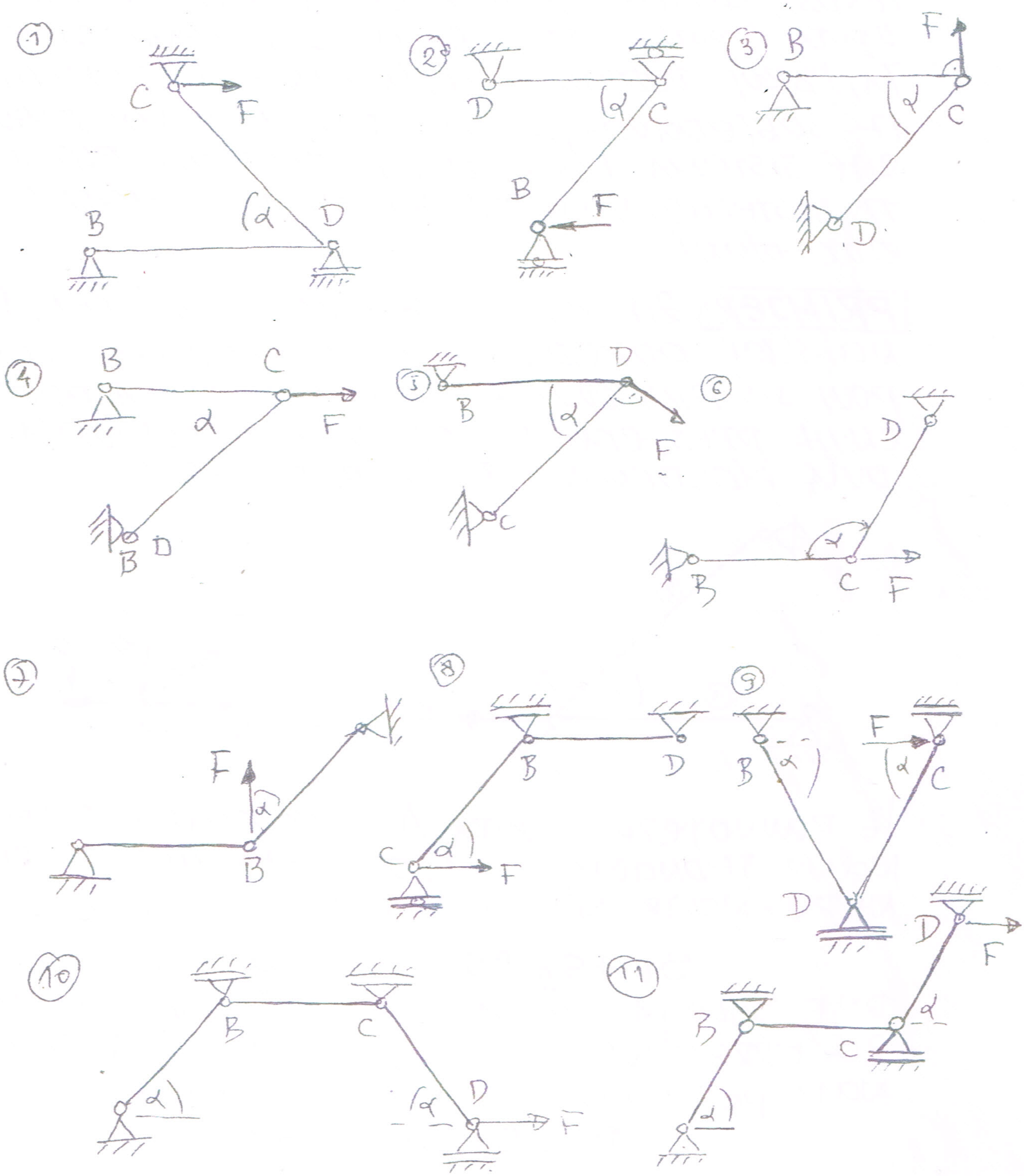
$$BB' = \frac{\Delta l_{①}}{\cos\alpha} = AA'.$$

Ukupno pomjeranje napadne tačke sile je

$$f = AA'' = AA' + A'A'' = \frac{Fl}{EA\cos^2\alpha} + \frac{Fl}{EA}$$

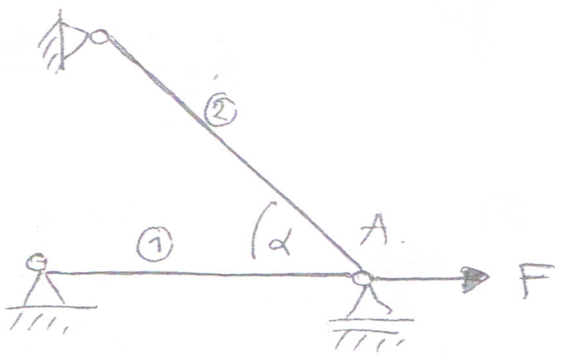
ZADACI ZA VJEŽBANJE

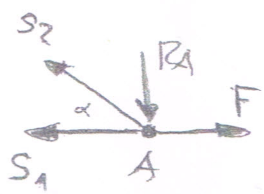
ŠTAPOVI PRIKAZANI NA SLICI SU ISTIH DUŽINA l, ISTIH POVRŠINA POPREČNOG PRESJEKA A I OD ISTOG MATERIJALA MODULA ELASTIČNOSTI E. ODREDITI HORIZONTALNO I VERTIKALNO POMJERANJE NAPADNE TAČKE SILE F. DATO JE I α.



Za sistem štapova koji je opterećen sa nekim opterećenjem kažemo da je **statički neodređen** ako je broj jednačina koje nam stoje na raspolaganju za određivanje sila u štapovima manji od broja nepoznatih sila u štapovima tj. od broja štapova. Zavisno od toga koliko iznosi razlika ta dva broja razlikujemo 1 put, 2 puta, 3 puta ... statički neodređene sisteme. Taj broj dodatnih jednačina se formiraju iz sagledavanja deformisanje konfiguracije sistema. Kroz primjere ćemo razmatrati sisteme koji su jedan put statički neodređeni.

PRIMJER: Za sistem štapova opterećen kao na slici odrediti sile u štapovima. Svi štapovi su istih dužina ℓ, istih površina poprečnih presjeka A i od istog materijala modula elastičnosti E. Dato je i F.





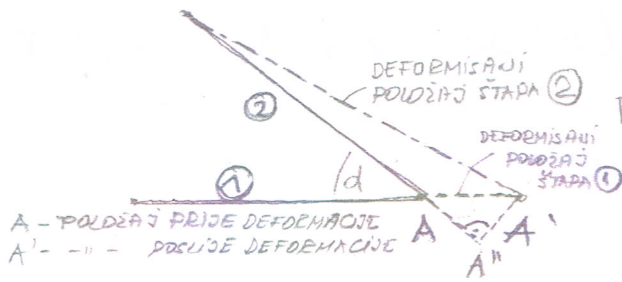
Iz ravnoteže čvora A dobijamo samo jednu jednačinu za određivanje dvije nepoznate sile u štapovima i to

$$S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha - F = 0 ,$$

dok druga jednačina ($\sum F_{iv} = 0$) služi za određivanje reakcije R_A kad su nam poznate sile u štapovima

$$R_A - S_2 \sin\alpha = 0$$

Dakle radi se o sistemu koji je 1x STATIČKI NEODREĐEN. Dopunsku jednačinu određujemo iz posmatranja deformisane konfiguracije sistema koja je prikazana na slici i



koja je određena činjenicom da tačka A može da se pomjera samo u horizontalnom pravcu. Pošto je

$$\Delta l_{1} = AA' = \frac{S_1 l}{EA} \quad ; \quad \Delta l_{2} = AA'' = \frac{S_2 l}{EA},$$

to iz $\Delta AA'A''$ dobijamo da je

$$\Delta l_{1} \cdot \cos\alpha = \Delta l_{2},$$

odnosno

$$\frac{S_1 \cdot l}{EA} \cos\alpha = \frac{S_2 l}{EA},$$

pa je

$$S_1 \cos\alpha = S_2.$$

Zamjenom prethodnog izraza u jednačinu

$$S_1 + S_2 \cos\alpha - F = 0,$$

dobijamo

$$S_1 = \frac{F}{1+\cos^2\alpha},$$

odnosno

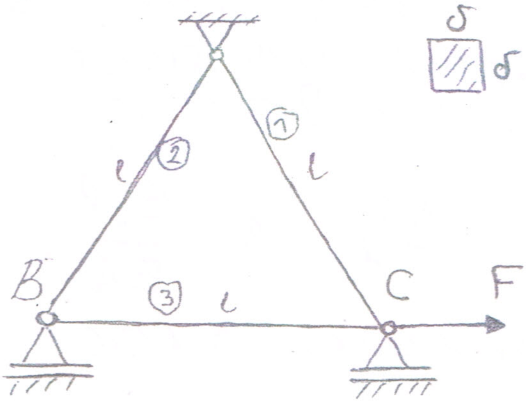
$$S_2 = F \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}.$$

PRIMJER: Štapovi sistema prikazanog na slici su izrađeni od istog materijala i istog su kvadratnog poprečnog presjeka. Odrediti:

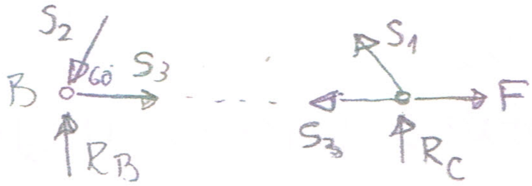
a) sile u štapovima

b) dimenziju δ poprečnog presjeka

Dato je: $F = 90\,kN$, $l = 1\,m$, $\sigma_{doz} = 16\,kN/cm^2$ i $E = 2\cdot 10^4\,\frac{kN}{cm^2}$



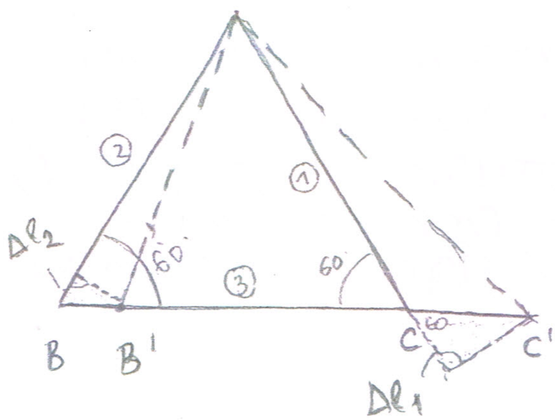
Iz posmatranja ravnoteže čvorova B i C možemo dobiti dvije jednačine za određivanje nepoznatih sila u štapovima S_1, S_2 i S_3, što znači da je sistem 1x statički neodređen. Te jednačine su



$$S_2 \cdot \cos 60^\circ - S_3 = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60^\circ + S_3 - F = 0.$$

Treću jednačinu ćemo formirati iz sagledavanja izgleda deformisane konfiguracije sistema. Ona je prikazana na slici određena je činjenicom da se tačka C u horizontalnom pravcu pomjera za veću vrijednost od vrijednosti pomjeranja tačke B u horizontalnom pravcu jer spoljašnja sila F djeluje na tačku C.



VAŽI

$$\Delta l_3 = CC' - BB'$$

$$\Delta l_3 = \frac{\Delta l_1}{\cos 60^\circ} - \frac{\Delta l_2}{\cos 60^\circ}$$

POŠTO JE

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA}, \; \Delta l_2 = \frac{S_2 l}{EA}, \; \Delta l_3 = \frac{S_3 l}{EA},$$

TO SE IZ PRETHODNE JEDNAČINE DOBIJA

$$\frac{S_3 l}{EA} = \frac{S_1 l}{EA \cdot \frac{1}{2}} - \frac{S_2 l}{EA \cdot \frac{1}{2}} \; , \Leftarrow \left(\begin{array}{l} \overline{CC'} = \overline{BB'} + \Delta l_3, \\ \Delta l_3 = \overline{CC'} - \overline{BB'} \end{array} \right)$$

PA JE

$$S_3 = 2S_1 - 2S_2$$

IZ SISTEMA JEDNAČINA

$$\frac{1}{2} S_2 - S_3 = 0$$
$$\frac{1}{2} S_1 + S_3 - F = 0$$
$$S_3 = 2S_1 - 2S_2 ,$$

se dobija

$$S_1 = \frac{8}{9} F, \; S_2 = \frac{10}{9} F \; \text{ i } S_3 = \frac{4}{9} F.$$

Najveći napon se pojavljuje u štapu ②

$$\sigma_{max} = \frac{S_2}{A} = \frac{10\,F}{9\,\delta^2}$$

Iz uslova

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{doz} ,$$

dobijamo

$$\frac{10}{9} \frac{F}{\delta^2} \leq \sigma_{doz}$$

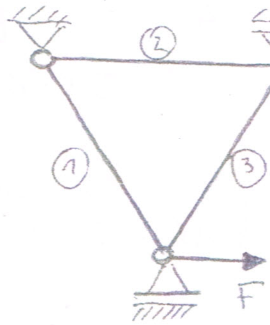
odnosno

$$\delta \geq \sqrt{\frac{10 F}{9 \sigma_{doz}}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 90}{9 \cdot 16}} = 2{,}5 \text{cm}$$

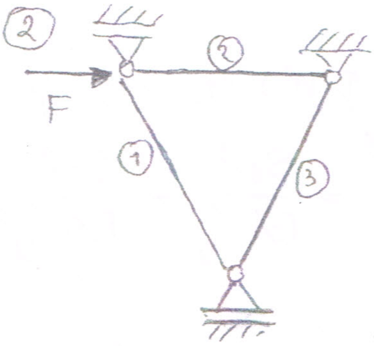
ZADACI ZA VJEŽBANJE.

Štapovi sistema prikazanih na slici su izrađeni od štapova istih dužina l istih poprečnih presjeka A i od istog materijala modula elastičnosti E. Odrediti sile u štapovima i maksimalni napon u sistemu ako je poznato F i A.

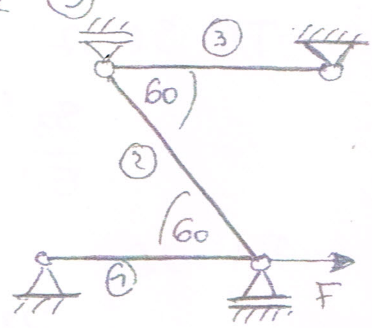
(1)



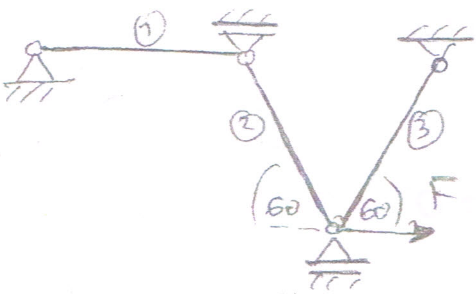
(2)



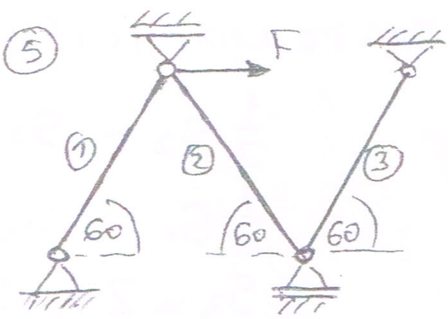
(3)



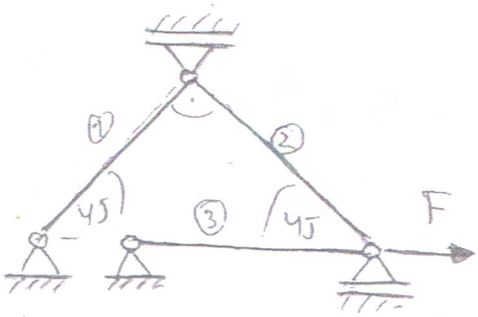
(4)



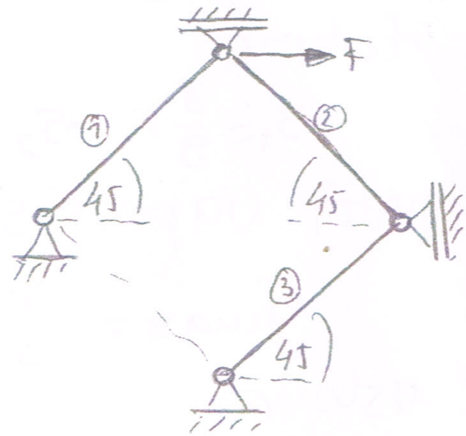
(5)



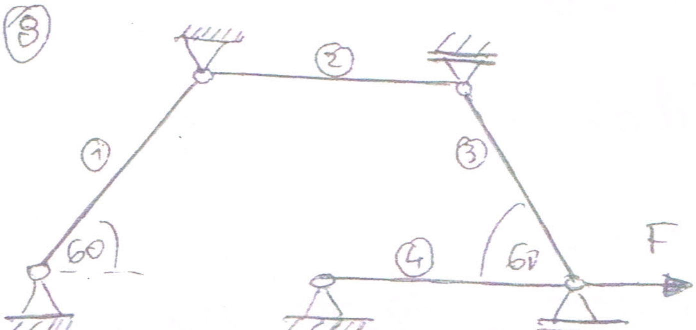
(6)



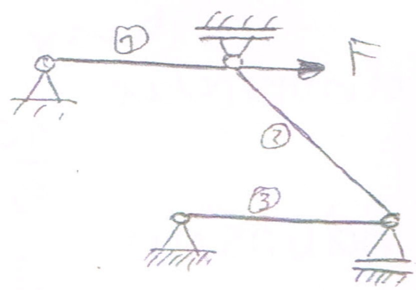
(7)



(8)



(9)

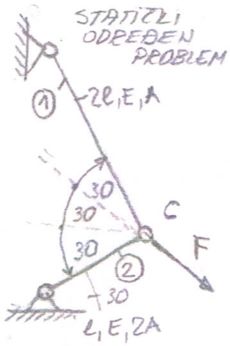


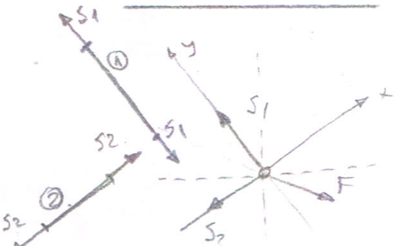
ZADACI –

ODREDITI HORIZONTALNO I VERTIKALNO POMJERANJE NAPADNE TAČKE SILE. DATO JE: F, l, E, A

1°

STATIČKI ODREĐEN PROBLEM



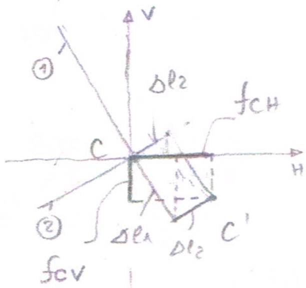


$\Sigma F_x = 0 \quad -S_2 + F\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{F}{2}$

$\Sigma F_y = 0 \quad S_1 - \frac{F\sqrt{3}}{2} = 0 \quad S_1 = \frac{F\sqrt{3}}{2}$

$\Delta l_1 = \frac{S_1\cdot 2l}{EA} = \frac{F\sqrt{3}l}{EA}$ (IZDUŽENJE)

$\Delta l_2 = \frac{S_2\cdot l}{E\cdot 2A} = \frac{Fl}{4EA}$ (IZDUŽENJE)



$f_{cH} = \Delta l_1\cdot\frac{1}{2} + \Delta l_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$f_{cH} = \frac{\sqrt{3}Fl}{EA}\cdot\frac{1}{2} + \frac{F\cdot l}{4EA}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f_{cH} = \frac{\sqrt{3}Fl}{EA}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5\sqrt{3}Fl}{8EA}$

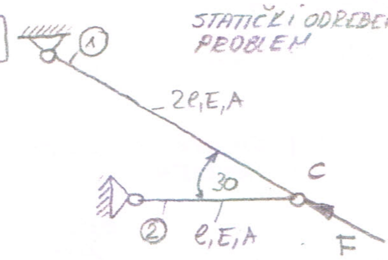
$f_{cv} = \Delta l_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \Delta l_2\cdot\frac{1}{2}$

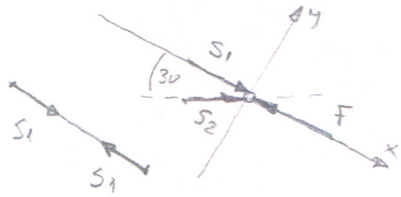
$f_{cv} = \frac{\sqrt{3}Fl}{EA}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{Fl}{4EA}\cdot\frac{1}{2}$

$f_{cv} = \frac{Fl}{EA}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{25Fl}{16EA}$

2°

STATIČKI ODREĐEN PROBLEM





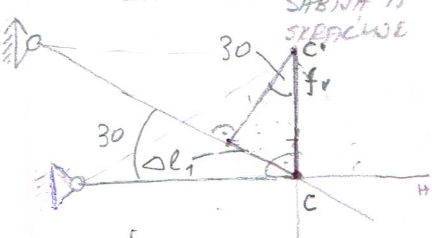
$\Sigma F_x = 0 \quad S_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - F\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$S_1 = F$

$\Sigma F_y = 0 \quad S_2\cdot\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow S_2 = 0$

$\Delta l_2 = \frac{S_2\cdot l}{EA} = 0$ (ŠTAP ② SE NE DEFORMIŠE

$\Delta l_1 = \frac{S_1\cdot 2l}{EA} = \frac{2Fl}{EA}$ (ŠTAP ① SE SABIJA TJ SKRAĆUJE

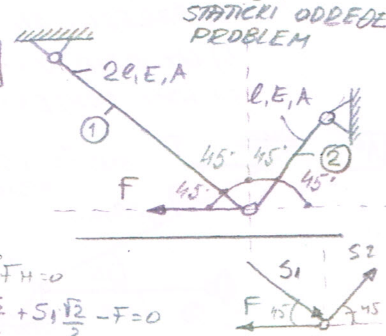


$f_H = 0$

$f_v = 2\Delta l_1 = \frac{4Fl}{EA}$

3°

STATIČKI ODREĐEN PROBLEM



$\Sigma F_H = 0$

$S_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + S_1\frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0$

$\Sigma F_v = 0$

$S_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - S_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_1 = S_2$

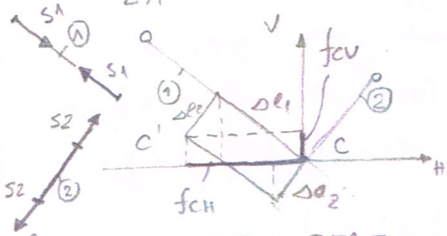
$S_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + S_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = F \Rightarrow S_1 = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{F\sqrt{2}}{2}$

$S_2 = F\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Delta l_1 = \frac{S_1\cdot 2l}{EA} = \frac{\sqrt{2}Fl}{EA}$ (SKRAĆENJE)

$\Delta l_1 = 2\Delta l_2$

$\Delta l_2 = \frac{S_2\cdot l}{EA} = \frac{\sqrt{2}Fl}{2EA}$ (IZDUŽENJE)



$f_{cH} = \Delta l_1\frac{\sqrt{2}}{2} + \Delta l_2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}Fl}{EA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} +$

$+ \frac{\sqrt{2}Fl}{2EA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Fl}{EA}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3Fl}{2EA}$

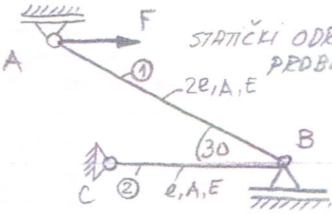
$f_{cv} = \Delta l_1\frac{\sqrt{2}}{2} - \Delta l_2\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f_{cv} = \frac{\sqrt{2}Fl}{EA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}Fl}{2EA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Fl}{2EA}$

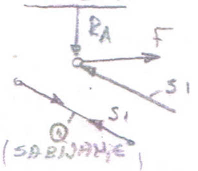
ZA SISTEM ŠTAPOVA OPTEREĆEN KAO NA SLICI
a) ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA
b) UTVRDITI U KOM JE ŠTAPU NAPON NAJVEĆI
c) NAĆI POMJERANJE TAČAKA

DATO JE: F, ℓ, E, A

1° STATIČKI ODREĐEN PROBLEM



a) ČVOR A

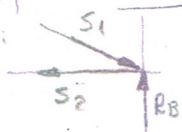


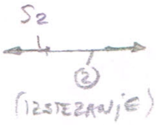
$\Sigma F_H = 0$

$S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - F = 0$

$S_1 = \frac{2F}{\sqrt{3}}$

ČVOR B





$\Sigma F_H = 0$

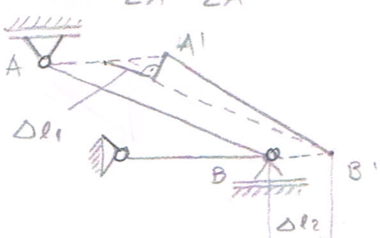
$-S_2 + S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$S_2 = S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2F}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_2 = F$

b) $\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{2F}{A\sqrt{3}}$, $\sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{F}{A}$ $\Rightarrow \sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_2$, $\sigma_1 > \sigma_2$

c) $\Delta\ell_1 = \frac{S_1 \cdot 2\ell}{EA} = \frac{2F}{\sqrt{3}} \frac{2\ell}{EA} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{F\ell}{EA}$

$\Delta\ell_2 = \frac{S_2 \cdot \ell}{EA} = \frac{F\ell}{EA}$



$f_B = f_{BH} = \Delta\ell_2 = \frac{F\ell}{EA}$; $f_B = \frac{F\ell}{EA}$

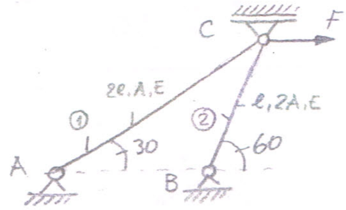
$f_A = f_{AH} = \Delta\ell_2 + \frac{\Delta\ell_1}{\cos 30}$

$f_A = \Delta\ell_2 + \frac{\Delta\ell_1 \cdot 2}{\sqrt{3}}$

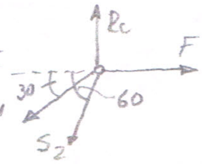
$f_A = \frac{F\ell}{EA} + \frac{4F\ell}{\sqrt{3}EA} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$f_A = \frac{F\ell}{EA}\left(1 + \frac{8}{3}\right) \Rightarrow f_A = \frac{11F\ell}{3EA}$

2° STATIČKI NEODREĐEN PROBLEM

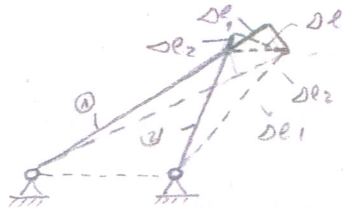


a) ČVOR C



$\Sigma F_H = 0 \quad F - S_1\cos 30 - S_2\cos 60 = 0$

$S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + S_2 \cdot \frac{1}{2} = F \quad \ldots\ldots (1)$



$\Delta\ell_1 = \Delta\ell \cdot \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Delta\ell$

$\Delta\ell_2 = \Delta\ell \cdot \cos 60 = \frac{\Delta\ell}{2}$

$\Delta\ell_1 = \sqrt{3}\,\Delta\ell_2$

$\frac{S_1 \cdot 2\ell}{EA} = \sqrt{3} \cdot \frac{S_2 \cdot \ell}{2EA}$

$S_1 = \frac{S_2\sqrt{3}}{4}$; $S_2 = \frac{4S_1}{\sqrt{3}} \quad \ldots (2)$

(1) i (2):

$S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}} S_1 \cdot \frac{1}{2} = F$

$S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + S_1 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = F$

$S_1\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = F \Rightarrow S_1 = \frac{2\sqrt{3}F}{7}$

$S_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}F}{7} \Rightarrow S_2 = \frac{8}{7}F$

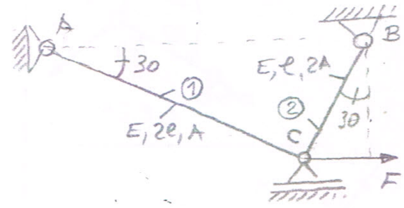
b) $\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{2\sqrt{3}F}{7A} = 0{,}495\frac{F}{A}$

$\sigma_2 = \frac{S_2}{2A} = \frac{8F}{14A} = 0{,}57\frac{F}{A}$ $\Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$

c) $\Delta\ell_C = \frac{\Delta\ell_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{S_1 \cdot 2\ell}{EA} \Rightarrow$

$\Delta\ell_C = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\ell}{EA} \cdot \frac{2\sqrt{3}F}{7} = \frac{8}{7}\frac{F\ell}{EA}$

3° STATIČKI NEODREĐEN PROBLEM

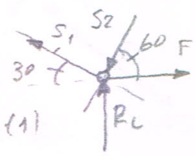


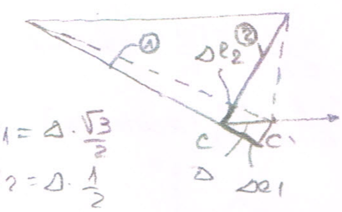
a) ČVOR C

$\Sigma F_H = 0.$

$F - S_2 \cdot \frac{1}{2} - S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + S_2 \cdot \frac{1}{2} = F \quad \ldots (1)$





$\Delta\ell_1 = \Delta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Delta\ell_2 = \Delta \cdot \frac{1}{2}$

$\Delta\ell_1 = \sqrt{3}\,\Delta\ell_2$

$\frac{S_1 \cdot 2\ell}{EA} = \sqrt{3} \cdot \frac{S_2 \cdot \ell}{2EA}$

$S_1 = S_2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, $S_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} S_1 \quad \ldots (2)$

Iz (1) i (2):

$S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}} S_1 \frac{1}{2} = F$

$\frac{S_1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sqrt{3} + 4\right) = F \Rightarrow S_1 = \frac{2\sqrt{3}F}{7}$

$S_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}F}{7} = \frac{8F}{7}$

b) $\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{2\sqrt{3}F}{7A} = 0{,}495\frac{F}{A}$

$\sigma_2 = \frac{S_2}{2A} = \frac{8F}{7A \cdot 2} = \frac{8}{14}\frac{F}{A} = 0{,}57\frac{F}{A}$

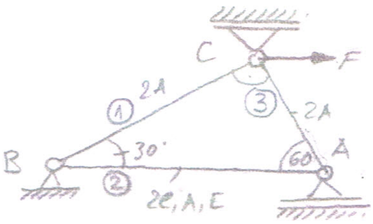
$\sigma_1 < \sigma_2$

c) $\Delta_C = \Delta = 2 \cdot \Delta\ell_2 = 2 \cdot \frac{8F}{7} \frac{\ell}{E\,2A}$

$\Delta_C = \frac{8}{7}\frac{F\ell}{EA}$

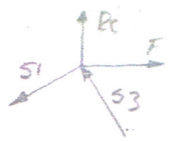
SVI ŠTAPOVI SISTEMA PRIKAZANOG I OPTEREĆENOG KAO NA SLICI SU OD ISTOG MATERIJALA, POPREČNIH PRESJEKA I DUŽINA KAO NA SLICI. ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA KAO I NOVI POLOŽAJ NAPADNE TAČKE SILE. DATO JE: F, l, E, A

1° STATIČKI NEODREĐEN ZADATAK



$l_1 = 2l\cdot\frac{\sqrt3}{2} = l\sqrt3$; $l_3 = 2l\cdot\frac{1}{2} = l$

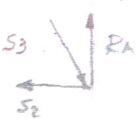
ČVOR C



$\Sigma F_H = 0$ $\quad F - S_1\frac{\sqrt3}{2} - S_3\cdot\frac{1}{2}$

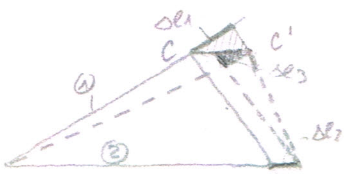
$S_1\sqrt3 + S_3 = 2F \quad \dots (1)$

ČVOR A



$\Sigma F_H = 0$ $\quad S_3\cdot\frac{1}{2} - S_2 = 0$ $\quad S_3 = 2S_2 \quad \dots (2)$

Slaganje deformacija



$2\frac{\Delta l_1}{\sqrt3} = \Delta l_2 + \frac{\Delta l_3}{\frac{1}{2}}$

$\frac{2\cdot S_1\cdot l\sqrt3}{\sqrt3\cdot E\cdot 2A} = \frac{S_2\cdot 2l}{EA} + \frac{2\cdot S_3\cdot l}{E\cdot 2A}$

$S_1 = 2S_2 + S_3 \quad \dots (3)$

$S_1 = 2S_2 + 2S_2 = 4S_2$

$4S_2\sqrt3 + 2S_2 = 2F$

$S_2 = \frac{F}{2\sqrt3 + 1} = 0{,}224F$, $S_3 = 0{,}45F$

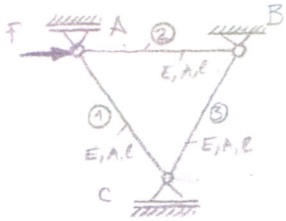
$S_1 = \frac{2F - S_3}{\sqrt3} = \frac{F(2 - 0{,}448)}{\sqrt3}$

$S_1 = 0{,}9F$

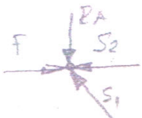
$\overline{CC'} = \frac{\Delta l_1}{\cos 30} = \frac{S_1\cdot l}{2EA}\cdot\frac{2}{\sqrt3} =$

$\overline{CC'} = \frac{0{,}9\cdot Fl}{\sqrt3\, EA} = 0{,}52\frac{Fl}{EA}$

2° STATIČKI NEODREĐEN ZADATAK

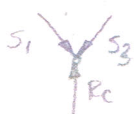


ČVOR A



$\Sigma F_H = 0$ $\quad F - S_2 - \frac{S_1}{2} = 0 \quad \dots (1)$

ČVOR C

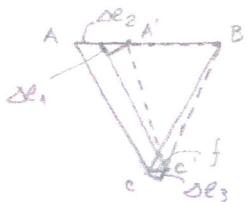


$\Sigma F_H = 0$

$S_1\frac{1}{2} - S_3\frac{1}{2} = 0$

$S_1 = S_3 \quad \dots (2)$

SLAGANJE DEFORMACIJA



$f = \frac{\Delta l_3}{\sin 30} = \overline{CC'}$

$f = 2\Delta l_3$

$\Delta l_2 = \overline{AA'}$

$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\sin 30} + f$

$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 + 2\Delta l_3 \quad \dots (*)$

$\frac{S_2 l}{EA} = 2\cdot\frac{S_1 l}{EA} + 2\cdot\frac{S_3 l}{EA}$

$S_2 = 2S_1 + 2S_3 \quad \dots (3)$

$(2) \Rightarrow \quad S_2 = 4S_1 = 4S_3$

$(1) \Rightarrow \quad F - 4S_1 - \frac{S_1}{2} = 0$

$\frac{9S_1}{2} = F \quad S_1 = \frac{2F}{9} = S_3$

$S_2 = \frac{8F}{9}$

$\overline{AA'} = \Delta l_2 = \frac{S_2\, l}{EA}$

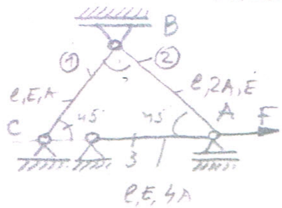
$\overline{AA'} = \frac{8Fl}{9EA} = \Delta l_2$

$\Delta l_3 = \frac{S_3\, l}{EA} = \frac{2Fl}{9EA} = \Delta l_1$

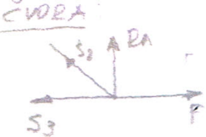
iz $(*)$:

$\Delta l_2 = \frac{2Fl}{9EA}\cdot 2 + \frac{2Fl}{9EA}\cdot 2 = \frac{8Fl}{9EA}$

3° STATIČKI NEODREĐEN PROBLEM



ČVOR A

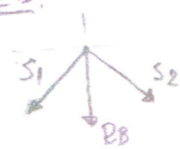


$\Sigma F_H = 0$

$-S_3 - S_2\frac{\sqrt2}{2} + F = 0$

$S_3 + S_2\frac{\sqrt2}{2} = F \quad \dots (1)$

ČVOR B:

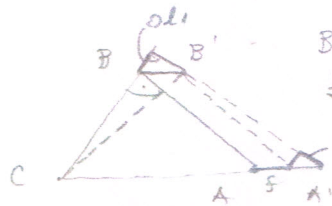


$\Sigma F_H = 0$

$S_2\frac{\sqrt2}{2} - S_1\frac{\sqrt2}{2} = 0$

$S_1 = S_2 \quad \dots (2)$

SLAGANJE DEFORMACIJA



$\overline{BB'} = f$

$f = \frac{\Delta l_1}{\sqrt2/2}$

$\overline{AA'} = f + \frac{\Delta l_2}{\sqrt2/2}$ $\qquad \Delta l_3 = \overline{AA'}$

$\Delta l_3 = \frac{2\Delta l_1}{\sqrt2} + \frac{2\Delta l_2}{\sqrt2}$

$\frac{S_3\cdot l}{E\cdot 4A} = \frac{2}{\sqrt2}\cdot\frac{S_1\cdot l}{EA} + \frac{2}{\sqrt2}\cdot\frac{S_2\cdot l}{E\,2A}$

$\frac{S_3}{4} = S_1\sqrt2 + S_2\frac{\sqrt2}{2}$

$S_3 = 4S_1\sqrt2 + 2S_2\sqrt2 \quad \dots (3)$

$S_3 = 4S_1\sqrt2 + 2S_1\sqrt2 = 6S_1\sqrt2$

(1): $\quad 6S_1\sqrt2 + S_1\frac{\sqrt2}{2} = F$

$\frac{13S_1\sqrt2}{2} = F \Rightarrow S_1 = \frac{2F}{13\sqrt2} = S_2$

$S_3 = 6\cdot\frac{2F}{13\sqrt2} = \frac{12F}{13\sqrt2}$

$\overline{AA'} = \Delta l_3 = \frac{S_3\cdot l}{E\cdot 4A} = \frac{12Fl}{13\sqrt2\, 4EA} =$

$\overline{AA'} = \Delta l_3 = \frac{3Fl}{13\sqrt2\, EA}$